

安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《高等代数（下）》期中考试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

一、填空题（第 1、3、4 题每题 5 分，第 2 题 20 分，共 35 分）

1. 设多项式 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$. 则

$(f(x), g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知复矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda I - A| = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$. 请写出与 A 相似的所有可能的 Jordan 标准形（不计较排列次序），并把下面表格填写完整（若列不够，可增加）.

与 A 相似的所有可能的 Jordan 标准形					
对应的初等因子组					
对应的不变因子					
对应的行列式因子					
对应的 A 的极小多项式					

3. 已知线性变换 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 则 σ 在 V 的基

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 设 $B = A^3 - 2A^* - 2I$, 则 $|B| - \text{tr}(B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

5. 举例并说明理由：在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上存在任意高次的不可约多项式.

6. 设 V 上线性变换 σ 仅有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$, $\iota: V \rightarrow V$ 是恒等变换. 已知 $\dim V = 6$ 且 $V = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2}$, 其中 $W_{\lambda_1} = \text{Ker} \sigma^2$ 的维数为 2, $W_{\lambda_2} = \text{Ker}(\sigma + 2\iota)^2$ 的维数为 4. 试写出 σ 在某些基下所有可能的 Jordan 标准形 (不计较 Jordan 块的排列次序).

三、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

7. 求 $f(x) = x^7 + 2x^6 - 6x^5 - 8x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 20x + 8$ 在实数 $\mathbf{R}$ 上的标准分解式.

8. 已知 $\dim V = 3$, 线性变换 $\sigma: V \rightarrow V$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$, 其中 J 为 Jordan 标准形矩阵;

(2) 求 V 的一个基, 使得 σ 在该基下的矩阵为 Jordan 标准形 J .

四、证明题（第 9、10 题每题 10 分，第 11 题 15 分，共 35 分）

9. 设 $f(x), g(x)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上一元多项式. 证明: 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则存在多项式 $u(x), v(x)$ 满足 $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

10. 设 n 阶矩阵 A 有 k 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 且可以对角化. 证明: 存在 k 个

n 阶矩阵 $A_i (i=1, 2, \dots, k)$ 满足 $\sum_{i=1}^k A_i = I_n$ 且 $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i = A$.

11. 证明: n 阶复矩阵 A 可对角化与下面每一条等价:

(1) A 有 n 个线性无关的特征向量;

(2) $\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, 其中 $V_{\lambda_i} = \{X \mid AX = \lambda_i X\}$;

(3) A 的每一个特征值的几何重数等于代数重数.